GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR DE MATEMATICĂ

PENTRU LICEU

EDITURA HYPERION

CUPRINS

Algebră

Analiză matematică

Trigonometrie

Geometrie

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION
CRAIOVA
Str. Împăratul Traian Nr. 30

Această lucrare a fost elaborată în conformitate cu programele școlare actuale aprobate de Ministerul Educației și Cercetării.

Comenzi pentru cărțile editurii noastre se pot face la următoarea adresă de e-mail:
editurahyperion@yahoo.de
sau la tel. / fax 0251-531133
sau la telefon 0744628656

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
SCHNEIDER, GHEORGHE-ADALBERT
Memorator și îndrumar de matematică pentru liceu / Gheorghe-Adalbert Schneider, - Craiova: Hyperion, 2020
Conține bibliografie
ISBN 978-606-589-057-2
51(075)

Algebră

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1 Mulțimea numerelor reale

1.1.1 Numere reale

1) Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1, \ 2, \cdots, \}$.
2) Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, \ 1, \ 2, \cdots, \}$.
3) Mulțimea numerelor raționale: $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\}$.
4) Mulțimea numerelor iraționale, formată din numerele reprezentate de o fracție zecimală, infinită, neperiodică și pe care o notăm $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.
5) Mulțimea numerelor reale: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$.

Evident au loc relațiile:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \emptyset$.

6) O fracție $\frac{m}{n}$ este ireductibilă dacă c.m.m.d.c. $(m, n) = 1$.

Exemple: $\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, \frac{3}{8}$.

7) O fracție ordinară $\frac{m}{n}$ este reductibilă dacă există cel puțin un număr prim prin care fracția se poate simplifica.

Exemple: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \ \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

8) Fracțiile ordinare care reprezintă numărul rațional $\frac{m}{n}$ se transformă în fracție zecimală după formula: $\frac{m}{n} = a, a_1 a_2 a_3 \cdots$.

Exemple: $\frac{1}{3}$=0, (3) - fracție zecimală periodică simplă
$\frac{5}{12}$=0,41(6) - fracție zecimală periodică mixtă.

1.1.2 Operații algebrice cu numere reale

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

1) Asociativitatea: $(x+y)+z=x+(y+z)\ (\forall)x,y,z\in\mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $x+y=y+x\ (\forall)x,y\in\mathbf{R}$;
3) Element neutru 0: $x+0=0+x=x\ (\forall)x\in\mathbf{R}$;
4) Element opus: : $x+(-x)=(-x)+x\ (\forall)x\in\mathbf{R}$; numărul $-x$ se numește opusul lui x.

b) Proprietățile înmulțirii

1) Asociativitatea: $(xy)z=x(yz)\ (\forall)x,y,z\in\mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $xy=yx\ (\forall)x,y\in\mathbf{R}$;
3) Element neutru 1: $x\cdot 1=1\cdot x=x\ (\forall)x\in\mathbf{R}$;
4) Element inversabil : $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1\ (\forall)\ x\in\mathbf{R},\quad x\neq 0$; numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x.

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x(y+z)=xy+xz\ (\forall)x,y,z\in\mathbf{R}.$$

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.

a) $x-y=x+(-y),(\forall)x,y\in\mathbf{R}$;

b) $x:y=x\cdot\frac{1}{y},y\neq 0$.

1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

a) Formule de calcul prescurtat

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
6) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;
7) $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$;
8) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
9) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
10) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, $n\geq 2,n\in\mathbf{N}$;
11) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$, $n\geq 2,\ n\in\mathbf{N}$, impar.

b) Alte formule algebrice utile

1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$;
2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$;
3) $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=[(a+b)^2-2ab]^2-$ $-2a^2b^2$;
4) $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$;
5) $a^6+b^6=(a^2+b^2)^3-3a^2b^2(a^2+b^2)$;
6) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2ac-2bc$;
7. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=$ $=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$;
8) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-$ $-ac-bc)=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.
9) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

c) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
2) $a^m:a^n=a^{m-n},a\neq 0$;
3) $(a^m)^n=a^{mn}$;
4) $(ab)^m=a^m\cdot b^m$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$, $b\neq 0$.

Aplicații

1. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b = 1$, atunci:
a) $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$ b) $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$.

Soluție: Se aplică formulele **1)** și **2)** de la **1.1.3** b).

2. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b + c = 0$, atunci: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Soluție: Se aplică formula **8)** de la **1.1.3** b).

3. Să se descompună în factori:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$$

Soluție: $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2b - a^2c + $
$+ b^2c - b^2a + c^2a - c^2b = ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + $
$+ c^2(a-b) = (a-b)(ab - ac - bc + c^2) = (a-b)(b-$
$-c(a-c)$.

1.1.4 Ordonarea numerelor reale

Introducem pe **R** relațiile $<$ respectiv $\leq$ astfel:
a) $x < y$ dacă $y - x > 0$;
b) $x \leq y$ dacă $y - x \geq 0$.

a) Proprietatea de trihotomie. Oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$ este adevărată una și numai una din relațiile $x < y, x = y, x > y$.

b) Proprietățile relației $\leq$:
1) $x \leq x, (\forall) x \in \mathbf{R}$ (reflexivitate);
2) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie);
3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitate).

Relația $\leq$, este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă și deci este o **relație de ordine** pe mulțimea **R**.

Relația $<$ este tranzitivă, dar nu este reflexivă și antisimetrică și deci nu este relație de ordine pe mulțimea **R**.

c) Relația $\leq$ este o **relație de ordine totală** pe **R**, deoarece $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

d) Proprietăți de legătură ale relației $\leq$ cu operațiile de adunare și înmulțire:
1) $x \leq y, z \in \mathrm{R} \Rightarrow x + z \leq y + z$;
2) $x \leq y, z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$;
3) $x \leq y, z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$;
4) $x \leq y, z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$;
5) $x \leq y, z \leq t,\ x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$, implică $\Rightarrow xz \leq yt$.

Aplicații

1. Să se compare numerele: $a = 2^{99}$ și $b = 9^{33}$.

Soluție: $a = 2^{99} = (2^{11})^9 = 2048^9$; $b = 9^{33} = 3^{66} >$
$> 3^{63} = 2187^9$. Atunci $a = 2048^9 < 2187^9 = b$. Deci $a < b$.

2. Fiind dat $a \in \mathbf{R}$, să se compare numerele: $2a$ și $a + 1$.

Soluție: $2a \leq a + 1 \Leftrightarrow a \leq 1$ și $2a > a + 1 \Leftrightarrow a > 1$.
Deci, dacă $a \leq 1$, ordinea este $2a, a + 1$, iar dacă $a > 1$, ordinea este $a + 1, 2a$.

1.1.5 Modulul unui număr real

Definiție. Valoarea absolută sau modulul unui număr real x se definește astfel: $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți:
1) $|x| \geq 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$;
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3) $|-x| = |x|, (\forall) x \in \mathbf{R}$;
4) $|xy| = |x| \cdot |y|, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$;
5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $(\forall) x, y \in \mathbf{R}, y \neq 0$;
6) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$;
7) $|x| = a \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a = 0 \\ \pm a, & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$;

8) $|x| < a, a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$;
9) $|x| > a, a > 0 \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$.

Aplicații

1. Rezolvați în **R** ecuațiile:

a) $|x+2| = 6$ b) $\big|x - |x+1|\big| = 1$.

Soluție. a) $|x+2| = 6 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 6 \Leftrightarrow x = 4$ sau $x = -8$.

b) $\big|x - |x+1|\big| = 1 \Leftrightarrow x - |x+1| = \pm 1 \Leftrightarrow |x+1| = x - 1$ și $|x+1| = x + 1$.

1) Dacă $x \leq -1$, ecuațiile devin: $-x - 1 = x - 1$ și $-x - 1 = x + 1$ cu soluțiile $x = 0$ și $x = -1$, corectă fiind doar -1.

2) Dacă $x > -1$, ecuațiile devin: $x + 1 = x - 1$ și $x + 1 = x + 1$. Prima ecuație nu are soluție, iar a doua ecuație are soluție orice $x > -1$.

1.1.6. Aproximări, trunchieri, rotunjiri

1) Fiind dat numărul real pozitiv $x = a, a_1 a_2 \dots a_n \cdots$ atunci:
a) aproximația prin lipsă de ordinul n a lui x este:

$$x_n' = a, a_1 a_2 \dots a_n$$

b) aproximația prin adaos de ordinul n a lui x este:

$$x_n'' = a, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}.$$

2) Fiind dat numărul real negativ $x = -a, a_1 a_2 \dots a_n \cdots$ atunci:
a) aproximația prin lipsă de ordinul n a lui x este:

$$x_n' = -a, a_1 a_2 \dots a_n - 10^{-n}$$

b) aproximația prin adaos de ordinul n a lui x este:

$$x_n'' = -a, a_1 a_2 \dots a_n.$$

3) Fiind dat numărul real $x = a, a_1 a_2 \dots a_n \cdots$ atunci trunchierea de ordinul n a lui x este $x_n' = a, a_1 a_2 \dots a_n$.

4) Fiind dat numărul real $x = a, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \cdots$ atunci rotunjirea lui x la a n-a zecimală se calculează astfel:

a) Dacă $a_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, atunci $x_n = a, a_1 a_2 \dots a_n$.
b) Dacă $a_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, atunci $x_n = a, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}$.

Aplicații

1) Scrieți pentru $a = \sqrt{3}$ și $b = -\sqrt{3}$:

a) aproximațiile zecimale de ordinul 2;
b) trunchierile de ordinul 3;
c) rotunjirile la a 4-a zecimală.

Soluție. $\sqrt{3} = 1{,}7320508\cdots$ și $-\sqrt{3} = -1{,}7320508\cdots$.
a) $a_2' = 1{,}73, a_2'' = 1{,}74$ și $b_2' = -1{,}74, b_2'' = -1{,}73$.
b) $a_2' = 1{,}732$ și $b_2' = -1{,}732$.
c) $a_2 = 1{,}7321$ și $b_2 = -1{,}7321$.

1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Axioma lui Arhimede. Pentru orice număr real x, există și este unic numărul întreg n astfel încât $x \in [n, n+1)$.

Definiție. Fiind dat numărul real x, numim partea întreagă a lui x și o notăm cu $[x]$, cel mai mare număr intreg, care este mai mic sau egal cu x.

Definiție. Fiind dat numărul real x, numim partea fracționară a lui x și o notăm cu $\{x\}$, diferența dintre numărul x și partea lui întreagă ($x - \{x\}$).

Exemple. $[1{,}7] = 1, [-2{,}3] = -3$; $\{5{,}2\} = 0{,}2, \{-3{,}1\} = 0{,}9$.

Aplicații

1. Să se calculeze: $\left[\sqrt{n(n+1)}\right]$ și $\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$.
Soluție. Se arată că:

$$n \leq \sqrt{n(n+1)} < n + 1 \Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = n.$$

$$\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\} = \sqrt{n(n+1)} - \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = \sqrt{n(n+1)} - n.$$

2. Fie $x, y \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că:

$$\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}.$$

Soluție. $x = [x] + \{x\}, y = [y] + \{y\} \Rightarrow x - y =$
$= [x] - [y] + \{x\} - \{y\}$. Evident: $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in Z$.

1.1.8 Operații cu intervale de numere reale

Fiind date numerele $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, definim următoarele submulțimi ale lui $\mathbf{R}$ pe care le numim intervale:

1) $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - interval închis în a și b
2) $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ - interval deschis în a și b
3) $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ - interval închis în a, deschis în b
4) $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ - interval deschis în a, închis în b
5) $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$ - interval închis la stânga în a și nemărginit la dreapta
6) $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ - interval deschis la stânga în a și nemărginit la dreapta
8) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ - interval nemărginit la stânga și închis la dreapta în b
9) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ - interval nemărginit la stânga și deschis la dreapta în b.

Operațiile cu intervale se definesc la fel ca operațiile cu mulțimi.

Distanța euclidiană dintre numerele reale a și b se definește ca fiind numărul $d(a, b) = |a - b|$.

Aplicații

1. Scrieți sub formă de intervale următoarele mulțimi:
a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\}$ b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\}$.

Soluție. a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\} = (-\infty, 3]$.
b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\} = (1, 5)$.

2. Să se determine mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 3) < 5\}.$$

Soluție. $d(x, 3) < 5 \Leftrightarrow |x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 3 < 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2 < x < 8$. Atunci: $\{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 3) < 5\} = (-2, 8)$.

1.1.9 Inegalități

Pentru a demonstra inegalități, ne bazăm pe proprietățile relației de ordine pe mulțimea $\mathbf{R}$. Se folosesc transformările echivalente și se obține o sumă de pătrate mai mare sau egală cu zero.

a) Inegalități ce pot fi folosite în cadrul demonstrării altor inegalități.

1) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
Soluție. $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$.

2) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.
Soluție. $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$.

3) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$.
Soluție. $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4} \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$.

4) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
Soluție. $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$.

5) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$.
Soluție. $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$.

6) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.
Soluție. $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

7) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2.$

Soluție. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

8) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$

Soluție. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$

9) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$

Soluție. Se folosește identitatea **8)** de la **1.1.3 b)** :
$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+$
$c-a2\Rightarrow a3+b3+c3-3abc\geq 0 \Rightarrow a3+b3+c3\geq 3abc.$
Se înlocuiește a^3 cu a, b^3 cu b și c^3 cu c și se obține inegalitatea dorită.

10. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2.$$

(Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski)

Soluție. După efectuarea calculelor se obține $(ay-bx)^2 \geq$ $\geq 0.$

11. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}.$$

(Inegalitatea lui Minkovski)

Soluție. După ridicarea la pătrat se obține inegalitatea:

$$\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \geq ax+by.$$

a) Dacă $ax+by \leq 0$, inegalitatea este evident adevărată.
b) Dacă $ax+by > 0$, ridicând la pătrat ambii membri ai inegalității obținem: $(ay-bx)^2 \geq 0.$

Aplicații

1. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Soluție. Se aplică inegalitatea **3)** și obținem:
$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}, \frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}$. Se adună membru cu membru cele trei inegalități.

2. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c).$$

Soluție. Se aplică inegalitatea **8)** pentru numerele reale ab, bc, ca și se obține: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq ab^2c+abc^2+$ $+a^2bc=abc(a+b+c).$

3. Să se arate că dacă $a, b > 0, a+b=1$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

a) $ab \leq \frac{1}{4}$ b) $2(a^3+b^3) \geq a^2+b^2.$

Soluție. a) $1=a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}.$
b) $2(a^3+b^3) \geq a^2+b^2 \Leftrightarrow 2(a+b)^3-6ab(a+b) \geq$
$\geq (a+b)^2-2ab \Leftrightarrow 2-6ab \geq 1-2ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{4}.$

4. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}, a+b+c=0$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

a) $a^2 \geq 4bc$ b) $ab+bc+ca \leq 0.$

Soluție. a) $a^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (-b-c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b^2+c^2+2bc \geq 4bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0.$
b) $ab+bc+ca \leq 0 \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 \geq 0.$