

**LIBRIS**

We know  
books

**GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER**

**MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR  
DE MATEMATICĂ  
PENTRU LICEU**

**EDITURA HYPERION**

## Algebră

<b>1</b>	Mulțimi și elemente de logică matematică . . . . .	3			
	1.1 Mulțimea numerelor reale . . . . .	3			
	1.1.1 Numere reale . . . . .	3			
	1.1.2 Operații algebrice cu numere reale . . . . .	3			
	1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere . . . . .	4			
	1.1.4 Ordonarea numerelor reale . . . . .	6			
	1.1.5 Modulul unui număr real . . . . .	7			
	1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri . . . . .	8			
	1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real . . . . .	9			
	1.1.8 Operații cu intervale de numere reale . . . . .	10			
	1.1.9 Inegalități . . . . .	11			
	1.2 Elemente de logică matematică . . . . .	14			
	1.2.1 Propoziție, predicat cuantificatori . . . . .	14			
	1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi . . . . .	16			
	1.3 Condiții necesare, condiții suficiente . . . . .	18			
	1.4 Tipuri de raționamente logice . . . . .	19			
<b>2</b>	Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale . . . . .	23			
	2.1 Șiruri . . . . .	23			
	2.2 Progresii aritmetice . . . . .	23			
	2.2.1 Noțiunea de progresie aritmetică . . . . .	23			
	2.2.2 Formula termenului general al progresiei aritmetice . . . . .	24			
	2.2.3 Suma primilor $n$ termeni ai unei progresii aritmetice . . . . .	25			
	2.2.4 Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice . . . . .	26			
				2.3 Progresii geometrice . . . . .	27
				2.3.1 Noțiunea de progresie geometrică . . . . .	27
				2.3.2 Formula termenului general al progresiei geometrice . . . . .	28
				2.3.3 Suma primilor $n$ termeni ai unei progresii geometrice . . . . .	29
				2.3.4 Alte proprietăți ale progresiilor geometrice . . . . .	29
			<b>3</b>	Funcții, lecturi grafice . . . . .	31
				3.1 Noțiunea de funcție . . . . .	31
				3.2 Funcții numerice . . . . .	32
				3.3 Compunerea funcțiilor . . . . .	34
			<b>4</b>	Funcția de gradul I . . . . .	36
				4.1 Ecuația de gradul I . . . . .	36
				4.2 Funcția afină . . . . .	36
			<b>5</b>	Funcția de gradul al doilea . . . . .	40
				5.1 Ecuația de gradul al doilea . . . . .	40
				5.2 Funcția de gradul al doilea . . . . .	42
			<b>6</b>	Mulțimi de numere . . . . .	47
				6.1 Numere reale . . . . .	47
				6.1.1 Puteri cu exponent întreg . . . . .	47
				6.1.2 Radicali . . . . .	47
				6.1.3 Puteri cu exponent rațional . . . . .	51
				6.1.4 Puteri cu exponent real . . . . .	51
				6.2 Logaritmi . . . . .	52
				6.3 Mulțimea numerelor complexe . . . . .	55
				6.3.1 Numere complexe sub formă algebrică . . . . .	55
				6.3.2 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe . . . . .	58
				6.3.3 Rezolvarea de ecuații în $C$ . . . . .	60
			<b>7</b>	Funcții și ecuații . . . . .	62
				7.1 Funcții și ecuații . . . . .	62
				7.1.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate. . . . .	62

	Funcții inverse	62
	7.1.2 Funcția putere cu exponent natural	64
	7.1.3 Funcția radical	64
	7.1.4 Funcția exponențială	65
	7.1.5 Funcția logaritmică	66
7.2	Ecuatii	66
	7.2.1 Ecuatii, inecuatii și sisteme de ecuatii irrationale	66
	7.2.2 Ecuatii, inecuatii și sisteme de ecuatii exponențiale	69
	7.2.3 Ecuatii, inecuatii și sisteme de ecuatii logaritmice	71
<b>8</b>	Metode de numărare	74
	8.1 Mulțimi finit ordonate	74
	8.2 Permutări	75
	8.3 Aranjamente	75
	8.4 Combinări	75
	8.5 Binomul lui Newton	76
<b>9</b>	Elemente de probabilități	78
	9.1 Evenimente. Operații cu evenimente	78
	9.2 Probabilitatea unui eveniment	79
	9.3 Proprietăți ale probabilităților	80
	9.4 Probabilități condiționate	80
	9.5 Evenimente independente	81
	9.6 Schema lui Poisson	81
	9.7 Schema lui Bernoulli	82
	9.8 Variabile aleatoare	82
<b>10</b>	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuatii liniare	85
	10.1 Permutări	85
	10.2 Matrice	86
	10.3 Determinanți	89
	10.4 Matrice inversabile	91

	10.5 Rangul unei matrice	92
	10.6 Sisteme de ecuatii liniare	93
<b>11</b>	Structuri algebrice	97
	11.1 Legi de compoziție	97
	11.2 Grupuri	102
	11.3 Inele	107
	11.4 Corpuri	110
	11.5 Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ( $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_p, p$ număr prim)	112

### Analiză matematică

<b>1</b>	Limite de funcții	119
	1.1 Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală	119
	1.1.1 Operații algebrice cu numere reale	119
	1.1.2 Ordonarea numerelor reale	120
	1.1.3 Modulul unui număr real	120
	1.1.4 Operații cu intervale de numere reale	121
	1.1.5 Mulțimi mărginite	122
	1.1.6 Marginile unei mulțimi	123
	1.1.7 Vecinătăți, puncte de acumulare	124
	1.2 Funcții reale de variabilă reală	124
	1.3 Șiruri de numere reale	125
	1.3.1 Noțiunea de șir	125
	1.3.2 Limite de șiruri	125
	1.3.3 Proprietăți ale șirurilor care au limită	126
	1.3.4 Șiruri monotone și mărginite	127
	1.3.5 Proprietăți ale șirurilor convergente	128
	1.3.6 Calculul limitelor unor șiruri	128
	1.3.7 Trecerea la limită în inegalități	129
	1.3.8 Criterii de convergență	130
	1.3.9 Alte criterii de convergență	124
	1.3.10 Lema lui Stolz-Cesaro	135

1.3.11	Numărul e	136
1.3.12	Constanta lui Euler	137
1.3.13	Operații cu șiruri convergente	137
1.3.14	Șiruri definite prin relații de recurență	140
1.4	Limite de funcții	142
1.4.1	Limita unei funcții într-un punct, limite laterale	142
1.4.2	Criterii de limită	146
1.4.3	Operații cu limite de funcții	147
1.4.4	Limite de funcții compuse	149
1.4.5	Limitele funcțiilor elementare	149
1.4.6	Limite remarcabile	156
2	Funcții continue	160
2.1	Studiul continuității în puncte de pe dreapta reală	160
2.2	Operații cu funcții continue	163
2.3	Proprietăți ale funcțiilor continue	167
3	Funcții derivabile	170
3.1	Derivata unei funcții într-un punct	170
3.2	Derivate laterale	172
3.3	Derivatele unor funcții uzuale	175
3.4	Operații cu funcții derivabile	177
3.4.1	Operații algebrice cu funcții derivabile	177
3.4.2	Derivarea funcțiilor compuse	179
3.4.3	Derivarea funcțiilor inverse	179
3.4.4	Formule de derivare a funcțiilor compuse	179
3.4.5	Funcții de $n$ ori derivabile	181
3.5	Funcții derivabile pe un interval	182
3.5.1	Puncte de extrem	182
3.5.2	Teorema lui Fermat	182
3.5.3	Teorema lui Rolle	183
3.5.4	Teorema lui Lagrange	184
3.6	Regulile lui l'Hospital	185

4	Reprezentarea grafică a funcțiilor	189
4.1	Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	189
4.2	Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	190
4.3	Asimptotele funcțiilor	191
4.4	Demonstrarea unor inegalități	194
4.5	Etapele reprezentării grafice a funcțiilor	197
5	Primitive	201
5.1	Primitivele unei funcții	201
5.1.1	Noțiunea de primitivă	201
5.1.2	Integrala nedefinită	201
5.1.3	Formule ale integralelor nedefinite	202
5.2	Metode de integrare	204
5.2.1	Metoda integrării prin părți	204
5.2.2	Metoda integrării prin schimbarea de variabilă	206
5.3	Integrarea funcțiilor raționale	208
5.3.1	Definirea funcțiilor raționale	208
5.3.2	Integrarea funcțiilor raționale simple	209
5.3.3	Integrarea funcțiilor raționale oarecare	212
5.4	Integrarea funcțiilor trigonometrice	214
6	Integrala definită	216
6.1	Funcții integrabile	216
6.1.1	Diviziuni	216
6.1.2	Sume Riemann, sume Darboux	217
6.1.3	Noțiunea de integrală definită	217
6.1.4	Formula lui Leibniz-Newton	219
6.1.5	Clase de funcții integrabile	220
6.1.6	Proprietăți ale funcțiilor integrabile	221
7	Metode de calcul pentru integrale definite	223
7.1	Metoda de integrare prin părți	223
7.2	Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă	224
8	Aplicații ale integralei definite	225

8.1 Aria unei suprafețe plane .....	225
8.2 Volumul corpurilor de rotație .....	226

## Trigonometrie

1. Unități de măsură pentru unghiuri și arce .....	227
2. Rezolvarea triunghiului dreptunghic .....	228
2.1 Funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit al unui triunghi $ABC$ dreptunghic în $A$ .....	228
2.2 Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile uzuale ale unui triunghi dreptunghic .....	228
2.3 Cazuri de rezolvare a triunghiului dreptunghic .....	229
2.4 Egalități trigonometrice într-un triunghi dreptunghic .....	230
2.5 Aplicații .....	230
3. Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice.	232
3.1 Cercul trigonometric .....	232
3.2 Funcții trigonometrice .....	233
4. Periodicitatea, paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice .....	236
4.1 Periodicitatea funcțiilor trigonometrice .....	236
4.2 Paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice .....	237
5. Reducerea la primul cadran .....	237
6. Graficele funcțiilor trigonometrice .....	239
7. Formule de legătură între funcțiile trigonometrice .....	242
8. Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri .....	244
9. Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu și ale jumătății unui unghi .....	245
10. Transformarea sumei sau diferenței de funcții	

trigonometrice în produs .....	249
11. Transformarea produsului de funcții trigonometrice în sumă .....	250
12. Identități trigonometrice .....	251
13. Transformarea unei expresii trigonometrice într-un produs de alte expresii trigonometrice .....	256
14. Expresii care nu depind de parametri .....	257
15. Funcții trigonometrice inverse .....	258
16. Inegalități trigonometrice .....	260
17. Ecuații trigonometrice .....	261
18. Aplicațiile trigonometriei în algebră .....	268
18.1 Numere complexe sub formă trigonometrică .....	268
18.2 Operații cu numere complexe sub formă trigonometrică .....	269
18.3 Rădăcinile de ordin $n$ ale unui număr complex .....	271
18.4 Ecuații binome .....	272
19. Aplicațiile trigonometriei în geometrie .....	273

## Geometrie

1. Paralelism și calcul vectorial .....	285
1.1 Segmente orientate .....	285
1.2 Vectori. Operații cu vectori .....	288
1.3 Descompunerea unui vector după direcții date .....	293
1.4 Vectori coliniari .....	294
1.5 Vectorul de poziție al unui punct .....	296
1.6 Teorema bisectoarei, vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi. Relația lui Sylvester .....	298
1.7 Teorema lui Menelaus. Teorema lui Ceva.	300
1.8 Produsul scalar a doi vectori .....	301

2. Elemente de geometrie analitică .....	303
2.1 Reper cartezian. Coordonate carteziene .....	303
2.2 Coordonatele unui vector. Operații cu vectori în coordonate carteziene .....	304
2.3 Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat .....	305
2.4 Ecuații ale dreptei în plan .....	306
2.5 Coliniaritate, concurență .....	307
2.6 Paralelism, perpendicularitate .....	308
2.7 Calcule de distanțe și arii .....	310

**Tiparul executat la  
EDITURA HYPERION  
CRAIOVA  
Str. Împăratul Traian Nr. 30**

Această lucrare a fost elaborată în conformitate cu programele școlare actuale aprobate de Ministerul Educației și Cercetării.

Comenzi pentru cărțile editurii noastre se pot face la următoarea adresă de e-mail:  
editurahyperion@yahoo.de  
sau la tel. / fax 0251-531133  
sau la telefon 0744628656

Copyright © Editura Hyperion

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României  
**SCHNEIDER, GHEORGHE-ADALBERT**  
**Memorator și îndrumar de matematică pentru liceu / Gheorghe-Adalbert Schneider, - Craiova: Hyperion, 2020**  
Conține bibliografie  
ISBN 978-606-589-057-2  
51(075)

## Algebră

### 1. Mulțimi și elemente de logică matematică

#### 1.1 Mulțimea numerelor reale

##### 1.1.1 Numere reale

- 1) Mulțimea numerelor naturale:  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .
- 2) Mulțimea numerelor întregi:  $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .
- 3) Mulțimea numerelor raționale:  $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$ .
- 4) Mulțimea numerelor iraționale, formată din numerele reprezentate de o fracție zecimală, infinită, neperiodică și pe care o notăm  $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ .
- 5) Mulțimea numerelor reale:  $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$ .

Evident au loc relațiile:

a)  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$       b)  $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$       c)  $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \emptyset$ .

- 6) O fracție  $\frac{m}{n}$  este ireductibilă dacă c.m.m.d.c.  $(m, n) = 1$ .

**Exemple:**  $\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, \frac{3}{8}$ .

- 7) O fracție ordinară  $\frac{m}{n}$  este reductibilă dacă există cel puțin un număr prim prin care fracția se poate simplifica.

**Exemple:**  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ .

- 8) Frațiile ordinare care reprezintă numărul rațional  $\frac{m}{n}$  se transformă în fracție zecimală după formula:  $\frac{m}{n} = a, a_1 a_2 a_3 \dots$ .

**Exemple:**  $\frac{1}{3} = 0, (3)$  - fracție zecimală periodică simplă  
 $\frac{5}{12} = 0,41(6)$  - fracție zecimală periodică mixtă.

##### 1.1.2 Operații algebrice cu numere reale

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor

de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

### a) Proprietățile adunării

- 1) Asociativitatea:  $(x + y) + z = x + (y + z)$  ( $\forall$ )  $x, y, z \in \mathbf{R}$ ;
- 2) Comutativitatea:  $x + y = y + x$  ( $\forall$ )  $x, y \in \mathbf{R}$ ;
- 3) Element neutru 0:  $x + 0 = 0 + x = x$  ( $\forall$ )  $x \in \mathbf{R}$ ;
- 4) Element opus:  $x + (-x) = (-x) + x$  ( $\forall$ )  $x \in \mathbf{R}$ ; numărul  $-x$  se numește opusul lui  $x$ .

### b) Proprietățile înmulțirii

- 1) Asociativitatea:  $(xy)z = x(yz)$  ( $\forall$ )  $x, y, z \in \mathbf{R}$ ;
  - 2) Comutativitatea:  $xy = yx$  ( $\forall$ )  $x, y \in \mathbf{R}$ ;
  - 3) Element neutru 1:  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$  ( $\forall$ )  $x \in \mathbf{R}$ ;
  - 4) Element inversabil :  $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$  ( $\forall$ )  $x \in \mathbf{R}, x \neq 0$ ;
- numărul  $\frac{1}{x}$  se numește inversul lui  $x$ .

### c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

- 1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:  
$$x(y + z) = xy + xz$$
 ( $\forall$ )  $x, y, z \in \mathbf{R}$ .

**Observație.** Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.

- a)  $x - y = x + (-y)$ , ( $\forall$ )  $x, y \in \mathbf{R}$ ;
- b)  $x : y = x \cdot \frac{1}{y}$ ,  $y \neq 0$ .

### 1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

#### a) Formule de calcul prescurtat

- 1)  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;
- 2)  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ;
- 3)  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ;
- 4)  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;

- 5)  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ;
- 6)  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ;
- 7)  $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$ ;
- 8)  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ;
- 9)  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ;
- 10)  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ ,  
 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$ ;
- 11)  $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ ,  
 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$ , impar.

#### b) Alte formule algebrice utile

- 1)  $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ ;
- 2)  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ ;
- 3)  $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a + b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2$ ;
- 4)  $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ ;
- 5)  $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2)$ ;
- 6)  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$ ;
7.  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$   
$$= \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$
;
- 8)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \frac{1}{2} (a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$ .
- 9)  $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$ .

#### c) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

- 1)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;
- 2)  $a^m : a^n = a^{m-n}$ ,  $a \neq 0$ ;
- 3)  $(a^m)^n = a^{mn}$ ;
- 4)  $(ab)^m = a^m \cdot b^m$ ;
- 5)  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ,  $b \neq 0$ .

## Aplicații

1. Să se arate că dacă  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât  $a + b = 1$ , atunci:

a)  $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$       b)  $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$ .

**Soluție:** Se aplică formulele 1) și 2) de la 1.1.3 b).

2. Să se arate că dacă  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , astfel încât  $a + b + c = 0$ ,

atunci:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

**Soluție:** Se aplică formula 8) de la 1.1.3 b).

3. Să se descompună în factori:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$$

**Soluție:**  $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b = ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a-b) = (a-b)(ab - ac - bc + c^2) = (a-b)(b - c(a-c)).$

### 1.1.4 Ordonarea numerelor reale

Introducem pe  $\mathbf{R}$  relațiile  $<$  respectiv  $\leq$  astfel:

- a)  $x < y$  dacă  $y - x > 0$ ;  
b)  $x \leq y$  dacă  $y - x \geq 0$ .

a) **Proprietatea de trihotomie.** Oricare ar fi  $x, y \in \mathbf{R}$  este adevărată una și numai una din relațiile  $x < y, x = y, x > y$ .

b) **Proprietățile relației  $\leq$ :**

- 1)  $x \leq x, (\forall)x \in \mathbf{R}$  (reflexivitate);  
2)  $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$  (antisimetrie);  
3)  $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (tranzitivitate).

Relația  $\leq$ , este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă și deci este o **relație de ordine** pe mulțimea  $\mathbf{R}$ .

Relația  $<$  este tranzitivă, dar nu este reflexivă și antisimetrică și deci nu este relație de ordine pe mulțimea  $\mathbf{R}$ .

c) Relația  $\leq$  este o **relație de ordine totală** pe  $\mathbf{R}$ , deoarece  $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$  avem  $x \leq y$  sau  $y \leq x$ .

d) **Proprietăți de legătură** ale relației  $\leq$  cu operațiile de adunare și înmulțire:

- 1)  $x \leq y, z \in \mathbf{R} \Rightarrow x + z \leq y + z$ ;  
2)  $x \leq y, z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$ ;  
3)  $x \leq y, z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$ ;  
4)  $x \leq y, z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$ ;  
5)  $x \leq y, z \leq t, x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$ , implică  $\Rightarrow xz \leq yt$ .

### Aplicații

1. Să se compare numerele:  $a = 2^{99}$  și  $b = 9^{33}$ .

**Soluție:**  $a = 2^{99} = (2^{11})^9 = 2048^9$ ;  $b = 9^{33} = 3^{66} > 3^{63} = 2187^9$ . Atunci  $a = 2048^9 < 2187^9 = b$ . Deci  $a < b$ .

2. Fiind dat  $a \in \mathbf{R}$ , să se compare numerele:  $2a$  și  $a + 1$ .

**Soluție:**  $2a \leq a + 1 \Leftrightarrow a \leq 1$  și  $2a > a + 1 \Leftrightarrow a > 1$ .

Deci, dacă  $a \leq 1$ , ordinea este  $2a, a + 1$ , iar dacă  $a > 1$ , ordinea este  $a + 1, 2a$ .

### 1.1.5 Modulul unui număr real

**Definiție.** Valoarea absolută sau modulul unui număr real  $x$  se definește astfel:  $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

**Proprietăți:**

- 1)  $|x| \geq 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$ ;  
2)  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;  
3)  $|-x| = |x|, (\forall)x \in \mathbf{R}$ ;  
4)  $|xy| = |x| \cdot |y|, (\forall)x, y \in \mathbf{R}$ ;  
5)  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, (\forall)x, y \in \mathbf{R}, y \neq 0$ ;  
6)  $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, (\forall)x, y \in \mathbf{R}$ ;  
7)  $|x| = a \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a = 0 \\ \pm a, & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$



2. Fie  $x, y \in \mathbf{R}$ . Să se demonstreze că:

$$\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x + y \in \mathbf{Z}$$

**Soluție:**  $x = [x] + \{x\}, y = [y] + \{y\} \Rightarrow x - y = [x] - [y] + \{x\} - \{y\}$ . Evident:  $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$ .

### 1.1.8 Operații cu intervale de numere reale

Fiind date numerele  $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ , definim următoarele submulțimi ale lui  $\mathbf{R}$  pe care le numim intervale:

- 1)  $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$  - interval închis în  $a$  și  $b$
- 2)  $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$  - interval deschis în  $a$  și  $b$
- 3)  $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$  - interval închis în  $a$ , deschis în  $b$
- 4)  $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$  - interval deschis în  $a$ , închis în  $b$
- 5)  $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$  - interval închis la stânga în  $a$  și nemărginit la dreapta
- 6)  $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$  - interval deschis la stânga în  $a$  și nemărginit la dreapta
- 8)  $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$  - interval nemărginit la stânga și închis la dreapta în  $b$
- 9)  $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$  - interval nemărginit la stânga și deschis la dreapta în  $b$ .

Operațiile cu intervale se definesc la fel ca operațiile cu mulțimi.

**Distanța euclidiană** dintre numerele reale  $a$  și  $b$  se definește ca fiind numărul  $d(a, b) = |a - b|$ .

### Aplicații

1. Scrieți sub formă de intervale următoarele mulțimi:

- a)  $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\}$                       b)  $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\}$ .

**Soluție.** a)  $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\} = (-\infty, 3]$ .

b)  $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\} = (1, 5)$ .

2. Să se determine mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 3) < 5\}.$$

**Soluție.**  $d(x, 3) < 5 \Leftrightarrow |x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 3 < 5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -2 < x < 8$ . Atunci:  $\{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 3) < 5\} = (-2, 8)$ .

### 1.1.9 Inegalități

Pentru a demonstra inegalități, ne bazăm pe proprietățile relației de ordine pe mulțimea  $\mathbf{R}$ . Se folosesc transformările echivalente și se obține o sumă de pătrate mai mare sau egală cu zero.

**a) Inegalități ce pot fi folosite în cadrul demonstrării altor inegalități.**

1) Dacă  $a, b \in \mathbf{R}$ , atunci avem:  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

**Soluție.**  $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ .

2) Dacă  $a, b \in \mathbf{R}_+$ , atunci avem:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ .

**Soluție.**  $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ .

3) Dacă  $a, b \in \mathbf{R}_+$ , atunci avem:  $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ .

**Soluție.**  $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ .

4) Dacă  $a, b \in \mathbf{R}_+$ , atunci avem:  $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

**Soluție.**  $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ .

5) Dacă  $a, b \in \mathbf{R}_+$ , atunci avem:  $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$ .

**Soluție.**  $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ .

6) Dacă  $a, b \in \mathbf{R}_+$ , atunci avem:  $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ .

**Soluție.**  $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$$

7) Dacă  $a, b \in \mathbf{R}_+$ , atunci avem:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

**Soluție.**  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$

8) Dacă  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , atunci avem:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$

**Soluție.**  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

9) Dacă  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , atunci avem:  $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$

**Soluție.** Se folosește identitatea 8) de la 1.1.3 b) :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 +$$

$$c - a]^2 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Se înlocuiește  $a^3$  cu  $a$ ,  $b^3$  cu  $b$  și  $c^3$  cu  $c$  și se obține inegalitatea dorită.

10. Dacă  $a, b, x, y \in \mathbf{R}$ , atunci avem:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2.$$

(Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski)

**Soluție.** După efectuarea calculelor se obține  $(ay - bx)^2 \geq 0.$

11. Dacă  $a, b, x, y \in \mathbf{R}$ , atunci avem:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a + x)^2 + (b + y)^2}.$$

(Inegalitatea lui Minkovski)

**Soluție.** După ridicarea la pătrat se obține inegalitatea:

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by.$$

a) Dacă  $ax + by \leq 0$ , inegalitatea este evident adevărată.

b) Dacă  $ax + by > 0$ , ridicând la pătrat ambii membri ai inegalității obținem:  $(ay - bx)^2 \geq 0.$

## Aplicații

1. Să se arate că oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbf{R}_+$  avem:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

**Soluție.** Se aplică inegalitatea 3) și obținem:

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}, \frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}. \text{ Se adună membru cu membru cele trei inegalități.}$$

2. Să se arate că oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbf{R}_+$  avem:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

**Soluție.** Se aplică inegalitatea 8) pentru numerele reale  $ab, bc, ca$  și se obține:  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + abc^2 + a^2bc = abc(a + b + c).$

3. Să se arate că dacă  $a, b > 0, a + b = 1$ , atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

$$\text{a) } ab \leq \frac{1}{4} \quad \text{b) } 2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2.$$

**Soluție.** a)  $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}.$

$$\text{b) } 2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2(a + b)^3 - 6ab(a + b) \geq (a + b)^2 - 2ab \Leftrightarrow 2 - 6ab \geq 1 - 2ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{4}.$$

4. Să se arate că dacă  $a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0$ , atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

$$\text{a) } a^2 \geq 4bc \quad \text{b) } ab + bc + ca \leq 0.$$

**Soluție.** a)  $a^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (-b - c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \geq 4bc \Leftrightarrow (b - c)^2 \geq 0.$

$$\text{b) } ab + bc + ca \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq (a + b + c)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 \geq 0.$$